

Programme de colle n°1

semaine du 14 au 18 septembre

Notions vues en cours

Chapitre 1 – Logique et rédaction

- Assertion, prédicat, **connecteurs logiques** (et, ou, non, $\implies$, $\iff$), utilisation de la table de vérité pour montrer l'équivalence d'assertions.
- Involutivité du “non”, distributivité du “et” sur “ou” et réciproquement, négation de “ P et Q ”, de “ P ou Q ”, de “ $P \implies Q$ ”.
- **Quantificateurs** $\forall$, $\exists$ et $\exists!$, signification logique de l'ordre avec des quantificateurs différents, passage à la négation avec les quantificateurs.
- Règles de rédaction (mots-clés “Soit”, “Pour tout”, “On pose”, “Il existe”, etc.), variables muette (ou liée), variable libre
- **Raisonnements** : par implications successives, **par contraposée**, par équivalences successives, par double implication, par la négation (notamment avec un contre-exemple), **par l'absurde**, **par récurrence** (simple, double, forte), par disjonction de cas, **par analyse-synthèse**
- Condition nécessaire, condition suffisante

Chapitre 2 – Calcul algébrique dans $\mathbb{R}$

- **Inégalités** : transitivité, addition, multiplication, application d'une fonction aux deux membres de l'inégalité (selon la monotonie, éventuellement stricte, de cette fonction)
- **Valeur absolue** : définition, interprétation $|x| = \max(x, -x)$, propriétés évidentes, identités $\sqrt{a^2} = |a|$ et $\sqrt{a^2} = a$
- **Résolution d'équations et d'inéquations** dans $\mathbb{R}$ par analyse-synthèse (pour des égalités) ou par équivalences successives et disjonctions de cas (cas général) ; cas où l'(in)équation présente des valeurs absolues.
- **Partie entière** d'un réel x : définition, notation $\lfloor x \rfloor$, croissance de la fonction partie entière, $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$
- Première et seconde inégalité triangulaire, distance entre réels définie par $d(x, a) = |x - a|$, interprétation géométrique des solutions de $|x - a| \leq b$

Les questions de cours sont en page suivante

Questions Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles de la page suivante (chapitres 1 et 2).

Questions de Cours.

Q1

- Donner (sans démonstration) les formules correspondant à $\text{non}(\text{non}P)$, $\text{non}(P \text{ et } Q)$, $\text{non}(P \text{ ou } Q)$, $P \text{ et } (Q \text{ ou } R)$, $P \text{ ou } (Q \text{ et } R)$, $\text{non}(P \implies Q)$.
- Démontrer la formule correspondant à $\text{non}(P \implies Q)$ avec une table de vérité.
Chapitre 1, Exercice 1.8
- Quelle est la définition de la contraposée de $P \implies Q$? Quelle propriété vérifie-t-elle (sans démonstration) ?
Chapitre 1, Définition-Théorème 1.13
- Donner la négation (ni plus, ni moins) d'une assertion choisie par l'examineur. Voici un exemple pour situer la difficulté :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \geq 0 \text{ ou } y \in \mathbb{N} \implies \exists z \in \mathbb{R} \quad x + y > z$$

On notera qu'il y a des parenthèses implicites autour de " $x \geq 0 \text{ ou } y \in \mathbb{N}$ " et de " $\exists z \in \mathbb{R} \quad x + y > z$ ", si bien que l'assertion est de la forme

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad P(x, y) \implies Q(x, y)$$

[Exporter \(LaTeX\)](#)

Q2

- Chapitre 1, Exercice 1.16 :
1.16 ★★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : n est pair $\iff n^2$ est pair.

[Exporter \(LaTeX\)](#)

Q3

- Chapitre 1, Exercice 1.22 :
1.22 ★★ Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
On pourra admettre le résultat " n est pair si et seulement si n^2 est pair".

Les questions flash sont en page suivante

Chapitre 2 :

- Compléter : $\forall a \in \dots \sqrt{a^2} = \dots$ et $\forall a \in \dots \sqrt{a^2} = \dots$
- Sous quelle condition sur les réels a et b peut-on écrire " $a = b \iff a^2 = b^2$ " ?
- À quelle condition peut-on appliquer une fonction f des deux côtés d'une inégalité $a \leq b$ et quelle inégalité obtient-on ?
- Dessiner le graphe de la fonction partie entière.
- Soit x et y deux réels et k un entier. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\lfloor x + y \rfloor = \dots \quad \lfloor x + k \rfloor = \dots \quad \lfloor 2x \rfloor = \dots$$

- Énoncer la première inégalité triangulaire.
- Énoncer la seconde inégalité triangulaire.
- Étant donné deux réels quelconques, comment définit-on la distance qui les sépare ?

Chapitre 1 :

- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de " $P \implies Q$ ".
- Soit P et Q deux assertions. Donner la négation de " P ou Q ".
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner une caractérisation de " n est impair" en termes de quantificateurs.
- Donner la négation d'une assertion choisie par l'examineur, par exemple " $\forall y \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} \ y = 0$ ou $n \leq y$ ".
- Qu'appelle-t-on la contraposée de l'assertion " $P \implies Q$ " ? Quel est son lien logique avec l'assertion " $P \implies Q$ " ?
- On souhaite montrer une assertion H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence double. Décrire ce qu'il faut démontrer pour l'initialisation et pour l'hérédité.
- On souhaite montrer une assertion H_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence forte. Décrire ce qu'il faut démontrer pour l'initialisation et pour l'hérédité.
- Quel raisonnement utiliseriez-vous pour démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel ?

Annexe : code LaTeX des exercices à copier-coller

[Retour en
arrière](#)

Chapitre 1, Exercice 1.16 :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer
que : $n \text{ est pair} \iff n^2 \text{ est pair}$.

[Retour en
arrière](#)

Chapitre 1, Exercice 1.22 :

Montrer que $\sqrt{2}$ est
irrationnel.